11 - лекция. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

11 - лекция

11.1 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.

11.1. Анықтама. Жалпы, дербес және ерекше шешім.

Анықтама:

1. Ізделінетін функцияны, оның туындылары мен дифференциалдарын және аргументтерін байланыстыратын теңдеуді дифференциалдық теңдеу деп айтамыз.
2. .Теңдеуге кіретін туындының не дифференциалдың ең жоғарғы ретін дифференциалдық теңдеудің реті деп атаймыз.
3. Егер функцияның өзін, туындысын және дифференциалын теңдеуге қойғанда тепе-теңдік шығатын болса, онда функцияны дифференциалдық теңдеудің шешімі деп айтамыз.
4. Тек қана бір айнымалыға (бірнеше айнымалыға) тәуелді дифференциалдық теңдеуді қарапайым (дербес туындылы) дифференциалдық теңдеулер деп айтамыз.

16.1 мысал.

а) $y'''(x) - xy^2(x) = 3$ - үшінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу;

б) $xdx - ydy = 0$ - бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу.

1 - е с к е р т у. Ары қарай дифференциалдық теңдеу дегенді қарапайым дифференциалдық теңдеу деп түсінеміз.

11.2. Коши теоремасы. Жалпы және дербес шешім

$n-$ші ретті айқын дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; ...; y^{(n-1)}), \tag{1}$$

ал айқын емес $n-$ші ретті дифференциалдық теңдеу: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Коши есебі. (3) дифференциалдық теңдеуінің, $x = x_0$ болғанда

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0 \tag{2}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімдерін табыңыз.

Коши теоремасы. Егер қандай да бір тұйық облыста $f(x; y; y', ..., y^{(n-1)})$ функциясы барлық аргументі бойынша үзіліссіз болып және осы облыста оның дербес туындылары $f'_y, f'_{y'}, ..., f'_{y^{(n-1)}}$ табылса, онда (3) дифференциалдық теңдеуінің (4) бастапқы шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі болады, мұндағы $(x_0; y_0)$ нүктесі - осы облысқа тиісті нүкте.

Анықтама . Кез келген дифференциалданатын функция

$$y = \varphi(x; C_1, C_2, ..., C_n), \tag{3}$$

мұндағы $C_i, i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар, (1) дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі деп аталады, егер:

а) ол $C_i,\ i = \overline{1,n}$ -дің кез келген тұрақты мәндерінде (1) дифференциалдық теңдеуінің шешімі болса,

б) Коши теоремасының шартын қанағаттандыратын осы облыстың кез келген бастапқы шарты үшін,

$$y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0) \tag{4}$$

шешімі бастапқы шартты қанағаттандыратындай $C_i = C_i^0, i = \overline{1,n}$ тұрақтылары табылатын болса.

11 - лекция. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Дифференциал теңдеудің берілген облысындағы әрбір нүктесі үшін жалғыздық шарты орындалатын болса, онда (4) түріндегі шешім дербес шешім деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, (4) – қисықтар жиынтығы (интегралдық қисықтар). Коши теоремасының шарты орындалды дегеніміз - облысқа тиісті кез келген (x_0, y_0) нүктесінен (2) шартын қанағаттандыратын тек бір ғана қисық өтеді деген сөз.

(1) теңдеуінің айқын емес түрде берілген жалпы (дербес) шешімі:

$$\Phi(x; y; C_1; C_2; ...; C_n) = 0 \quad \left[\Phi(x; y; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0)\right]$$

сәйкесінше дифференциалдық теңдеудің жалпы (дербес) интегралы деп аталады. (1) теңдеуінің жалпы және дербес шешімінен басқа ерекше шешімдері болады.

Анықтама. C_i-ді ($i = \overline{1,n}$) қандай етіп таңдап алсақ та, жалпы шешімнен шықпайтын және шешімнің жалғыздық шарты бұзылатын нүктелерде орналасқан (облыстың шекарасында) шешімдерді ерекше шешімдер деп атаймыз.

16.2 мысал. Мынадай теңдеуді қарастыралық:

$$y' = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}, \quad R > 0 \qquad (5)$$

Шешуі. Орнына қою арқылы (5) теңдеуінің жалпы интегралы:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2 \qquad (6)$$

болатынына көз жеткізуге болады.

$$f'_y = -\frac{R^2}{y^2\sqrt{R^2 - y^2}},$$

болғандықтан, $y = 0, y = \pm R$ түзулерінде f'_y - шектелмеген, яғни, Коши теоремасының шарты бұзылып тұр. $y = 0$ (5)-теңдеуінің шешімі болмайтыны анық, ал $y = \pm R$ түзулері (5) теңдеуінің шешімдері және бұл шешімдер жалпы шешім (6)-дегі C қалай таңдалса да онымен беттеспейді, С=±∞ болса да. Геометриялық тұрғыдан, бұл - $y = \pm R$ түзулерінің кез келген нүктесі арқылы екі интегралдық қисық өтеді деген сөз. Мысалы, $(0; R)$ нүктесі арқылы $y = R$ және $x^2 + y^2 = R\,(C = 0)$ қисықтары өтеді. Сонымен, $y = \pm R$ - ерекше шешім.

Мысалдарда байқағанымыздай, теңдеуді шешу кезінде біз алғашқы функция табамыз. Сондықтан, дифференциалдық теңдеудің шешімін табу процессі теңдеуді интегралдау деп аталады.

11.3. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

y' бойынша шешілетін теңдеу:

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y), \quad y' = f(x; y) \qquad (7)$$

түрінде жазылады.

Бірінші ретті теңдеудің дифференциалдық пішіні мына түрде болады:

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0 \qquad (8)$$

2- е с к е р т у. Геометриялық тұрғыдан, (7) теңдеу әрбір $M(x; y)$ нүктесі үшін интегралдық қисыққа жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффицентінің мәнін береді, яғни, бағыттар өрісін береді.

11 - лекция. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Кей жағдайларда, x-ті y-ке қатысты функция ретінде қарастырсақ $\left(x' = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}\right)$, теңдеуді интегралдау жеңілденеді. Сондықтан да, ары қарай x пен y-ті тең құқылы айнымалылар деп есептейміз.

11.4 Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

Анықтама

$$M(x) \cdot N(y)dx + P(x) \cdot Q(y)dy = 0 \ ,$$

түріндегі, dx пен dy-тің алдындағы коэффиценттері тек x-ке тәуелді функция мен тек y-ке тәуелді функциялардың көбейтінділері болатын дифференциалдық теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$P(x) \neq 0$, $N(y) \neq 0$ деп есептеп, (1)-теңдеуінің екі жағын да $P(x) \cdot N(y)$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)} dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = C \ .$$

Дифференциал теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Е с к е р т у. $P(x) = 0$, $N(y) = 0$ жағдайлары бөлек зерттеледі. Егер дифференциал теңдеудің ерекше шешімдері бар болса, онда олар берілген алгебралық теңдеудің шешімдері болып табылады.

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.

3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008

4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.